

Proeftentamen Complexe Analyse, Januari 2005

- U is een deelverzameling van het complexe vlak \mathbb{C} .
 - Geef de definities van “ U is open” en van “ U is compact”.
 - Geef een niet-triviaal voorbeeld van een open U en van een compacte U .
- Hoe is de convergentiestraal r van $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Geef machtreksen F met convergentiestraal r gelijk aan $0, 1, \infty$ respectievelijk.
- Op welke deelverzamelingen $U \subset \mathbb{C}$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ absoluut uniform convergent? Van welke rationale functie f is $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ de machtreks ontwikkeling in $z = 0$?
- Bereken de Laurentreeks van de functie $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ in het punt $z = 0$. Gebruik die reeks om het maximum van $|f(z)|$ op de gesloten eenheids-schijf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ te berekenen.
- Definieer F als de meromorfe functie $\frac{e^z - 1}{z^2(z-1)^2}$.
 - Bereken voor elke pool $a \in \mathbb{C}$ de orde van F in a .
 - Bereken de eerste drie termen van de Laurent ontwikkeling van F in het punt $z = 1$.
- Bepaal met behulp van residuenrekening de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin \theta} d\theta.$$

- Bewijs dat

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}, \quad a > 0.$$

Aanwijzing: Voor $x \in \mathbb{R}$ is $x \sin x$ is het imaginaire deel van $x e^{ix}$.